

# Študija vodenja kolesnega mobilnega sistema po trajektoriji z omejitvami hitrosti, pospeška in trzaja

Martina Benko Loknar, Sašo Blažič in Andrej Zdešar

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška c. 25, 1000 Ljubljana, Slovenija

[martina.benkoloknar@fe.uni-lj.si](mailto:martina.benkoloknar@fe.uni-lj.si), [saso.blazic@fe.uni-lj.si](mailto:saso.blazic@fe.uni-lj.si), [andrej.zdesar@fe.uni-lj.si](mailto:andrej.zdesar@fe.uni-lj.si)

## *A study of trajectory tracking control of a wheeled mobile system with velocity, acceleration and jerk constraints*

In this paper, we have studied the trajectory tracking problem for a wheeled mobile system driving on a minimum-time trajectories with constraints on velocity, acceleration and jerk. The example trajectories were generated by applying a minimum-time velocity profile to predefined geometric paths representative of routes in different real industrial environments. The reference trajectory tracking control, based on an error model for tricycle kinematics, was implemented using the model predictive control (MPC) approach, where the criterion function was minimized by particle swarm optimization (PSO). We validated our approaches through simulations and experiments on a real robot platform. The cooperation of the proposed minimum-time trajectory generation algorithm and the control algorithm is suitable for many real-world applications, especially for automated guided vehicles (AGVs) in autonomous warehouses where travel time is a crucial factor for efficient operation.

### *Kratek pregled prispevka*

V članku smo proučevali problem sledenja trajektoriji za kolesni mobilni sistem, ki se giba po časovno minimalni trajektoriji z omejitvami hitrosti, pospeška in trzaja. Obravnavani primeri krivulj v geometrijskem smislu predstavljajo reprezentativne odseke poti v realnih industrijskih okoljih. Trajektorije, t.j. parametrizacijo s časom, pa smo nato določili z algoritmom, ki izračuna časovno minimalni hitrostni profil na vnaprej znani poti. Vodenje po referenčni trajektoriji, ki temelji na modelu pogreška za kinematiko tricikla, smo izvedli z modelnim prediktivnim vodenjem, pri čemer smo kriterijsko funkcijo minimizirali z optimizacijo z rojem delcev. Predstavljene pristope smo preverili s simulacijami in eksperimenti na realnem robotu. Uporaba predlaganega algoritma za generiranje časovno minimalnih trajektorij in algoritma vodenja je primerna za številne aplikacije, zlasti za avtomatsko vodena vozila v avtonomnih skladiščih, kjer je čas potovanja ključni dejavnik za učinkovito delovanje.

## 1 Uvod

Področje avtonomnih mobilnih sistemov je v zadnjih desetletjih izjemno napredovalo. Naraščajoče potrebe mednarodnega trga, e-trgovine in primanjkljaja delovne sile v logističnem sektorju so sprožile velik komercialen interes v razvoj in rabo avtomatsko vodenih vozičkov (angl. *automated guided vehicles*, AGV) ter ostalih avtonomnih mobilnih sistemov. V sodobni proizvodnji se avtomatsko vodeni vozički pogosto uporabljajo pri prevozu in skladiščenju dobrin in procesih za načrtovanje in izvajanje pretoka blaga in storitev od dobavitelja do stranke [1]. Med prednosti njihove uporabe sodijo agilnost, cenovna ugodnost, fleksibilnost in dobre manevrske sposobnosti.

Osrednji element večine dobavnih verig je skladiščenje, ki predstavlja petino vseh logističnih stroškov. Med procesi, ki potekajo v skladišču, pa je delovno in stroškovno najintenzivnejši proces priprava naročil. [2]. Številna podjetja so z namenom prihranka delovne sile in povečanja izkoristka prostora začela prehajati na popolnoma ali delno avtomatizirane skladiščne sisteme. Navigacijski sistem za AGV pogosto temelji na magnetnem traku. Dandanes pa predvidene naloge za avtonomne sisteme in proizvodno okolje postajajo vse bolj zapleteni, zato so potrebni bolj prilagodljivi in pametnejši navigacijski sistemi [3, 4]. Ena najbolj razširjenih naprednih metod vodenja je modelno prediktivno vodenje (angl. *model predictive control*, MPC). Uporablja se lahko za vodenje sistemov z več vhodi in izhodi in omogoča upoštevanje sistemskih omejitev [5]. Osnovno načelo delovanja MPC je določiti optimalne akcije vodenja, ki minimizirajo kriterijsko funkcijo, definirano v intervalu predikcijskega horizonta [6].

Članek obravnava vodenje kolesnega mobilnega robota s konfiguracijo tricikla po časovno minimalni trajektoriji z omejitvami hitrosti, pospeška in trzaja. Kriterijsko funkcijo prediktivnega vodenja na modelu pogreška smo minimizirali z metodo optimizacije z rojem delcev, s čimer smo poiskali globalno rešitev in dosegli realnočasno delovanje. Časovno minimalno trajektorijo smo izračunali na podlagi idej, natančneje predstavljene v [7, 8]. Predlagane pristope smo preizkusili v

simulacijskem okolju in na realnem kolesnem mobilnem robotu, pri čemer smo simulirali delovanje kolesnega mobilnega robota v avtomatiziranem skladišču.

## 2 Mobilni robot s kinematiko tricikla

Mobilni robot na sliki 1 ima štiri kolesa: prvi dve kolesi sta gnani neodvisno z dvema motorjema, zadnji kolesi pa sta pasivni. Vsak motor je opremljen z enkoderjem in ima notranji hitrostni regulator. Mobilni robot zato vodimo z nastavitvami hitrosti desnega in levega kolesa  $v_R$  in  $v_L$ . Prvi dve kolesi sta postavljeni na vozičku, ki je na telo mobilnega robota povezan s pasivnim rotacijskim spojem. Dodatni absolutni enkoder meri kot  $\gamma$  med vozičkom in telesom robota. Kolesni



Slika 1: Avtonomni kolesni mobilni robot, uporabljen v eksperimentih

mobilni robot s kinematiko tricikla ima naslednji neholonomični omejitvi:

$$\begin{aligned} \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi &= 0 \\ \dot{x} \sin \alpha - \dot{y} \cos \alpha - \dot{\varphi} D \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$D$  je razdalja med središčem vozička in zadnjo osjo. Zunanja kinematika kolesnega mobilnega robota je določena z:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) \cos \gamma(t) & 0 \\ \sin \varphi(t) \cos \gamma(t) & 0 \\ \frac{1}{D} \sin \gamma(t) & 0 \\ -\frac{1}{D} \sin \gamma(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \\ \omega_s(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Tangentna hitrost  $v_s(t)$  in kotna hitrost  $\omega_s(t)$  mobilnega robota sta povezani s hitrostma levega

$v_L(t)$  in desnega  $v_R(t)$  kolesa prek naslednjih zvez:

$$v_s(t) = \frac{v_L(t) + v_R(t)}{2} \quad (3)$$

$$\omega_s(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{L} \quad (4)$$

pri čemer je  $L$  oddaljenost med prednjima kolesoma. Kotna hitrost  $\omega_s(t)$  je definirana glede na globalni koordinatni sistem:  $\omega_s(t) = \dot{\alpha}(t) = \dot{\phi}(t) + \dot{\gamma}(t)$ .

### 3 Metodologija

Problema načrtovanja gibanja in vodenja avtonomnih mobilnih sistemov je možno nasloviti istočasno: v vsakem koraku je potrebno reševati problem optimalnega vodenja in izračunati optimalno trajektorijo ter ustrezen regulirni signal [3]. Zaradi računske zahtevnosti pa je v realnih aplikacijah pogostejši pristop, pri katerem se problema obravnavata ločeno.

Da bi analizirali vodenje realnega kolesnega mobilnega sistema po trajektoriji z omejitvami hitrosti, pospeška in trzaja, smo eksperimente izvedli v simulaciji preprostega skladiščnega okolja. Mobilni robot se premika med tremi vrstami skladiščnih regalov, pri čemer pobira in odlaga tovor z določenih lokacij. Predpostavili smo, da je gibanje v dveh ožjih prehodih možno le po ravnem tiru. Naša študija je nastala v želji po nadgraditvi pristopov, predstavljenih v [8].

#### 3.1 Generiranje časovno minimalne trajektorije z omejitvami trzaja

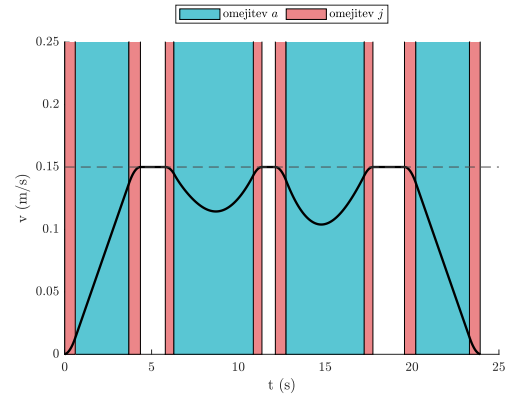
Za mobilni sistem, ki se giba vzdolž trikrat zvezno odvedljive krivulje, lahko vektorje hitrosti  $v(t)$ , pospeška  $a(t)$  in trzaja  $j(t)$  razstavimo na tangente in radialne komponente:

$$\begin{aligned} v(t) &= v(t) \cdot \hat{T} \\ a(t) &= a_T(t) \cdot \hat{T} + a_R(t) \cdot \hat{N} = \\ &= \dot{v} \cdot \hat{T} + v^2 \kappa \cdot \hat{N} \\ j(t) &= j_T(t) \cdot \hat{T} + j_R(t) \cdot \hat{N} = \\ &= (\ddot{v} - v^3 \kappa^2) \cdot \hat{T} + \frac{1}{v} \left( \frac{d}{dt}(v^3 \kappa) \right) \cdot \hat{N} \end{aligned} \quad (5)$$

pri čemer sta  $\hat{T}$  in  $\hat{N}$  enotski tangentni in enotski radialni vektor. S simbolom  $\kappa$  označujemo ukrivljenost poti ob času  $t$ . Pri izračunu časovno minimalne hitrostnega profila na dani poti smo sledili postopku, ki je predstavljen v [7], postopek določitve časovno minimalne trajektorije (optimizacijski problem določitve najustreznejše oblike poti) z uporabo Bézierovih krivulj pa je podrobno opisan v [8]. Omejitve hitrosti, pospeška in trzaja postavimo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |v(t)| \leq v_{\text{MAX}} \\ \frac{a_R^2(t)}{a_{R,\text{MAX}}^2} + \frac{a_T^2(t)}{a_{T,\text{MAX}}^2} &\leq 1 \\ \frac{j_R^2(t)}{j_{R,\text{MAX}}^2} + \frac{j_T^2(t)}{j_{T,\text{MAX}}^2} &\leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Dobljen hitrostni profil je prikazan na sliki 2.

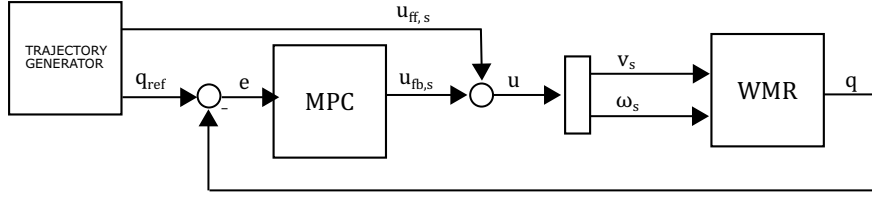


Slika 2: Časovno minimalni hitrostni profil na dani poti. Barvni pasovi označujejo intervale, kjer pospešek in trzaj dosegata mejne vrednosti.

#### 3.2 Modelno prediktivno vodenje robota po trajektoriji

Celotna regulacijska shema, ki je uporabljena za vodenje robota po trajektoriji, je prikazana na sliki 3. Prediktivno vodenje na osnovi modela je v literaturi že uveljavljena metoda [9]. Cilj je izračunati optimalne akcije vodenja z minimizacijo cenilke prek končnega horizonta  $h$ . Naj bo  $J$  cenilka pri vzorcu  $k$  definirana v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} J(u_{\text{fb}}, k) &= \sum_{i=1}^h \varepsilon^T(k+i) Q \varepsilon(k+i) + \\ &+ u_{\text{fb}}^T(k+i-1) R u_{\text{fb}}(k+i-1) \end{aligned} \quad (7)$$



Slika 3: Shematični prikaz regulirnih signalov z uporabo modelnega prediktivnega vodenja

kjer je  $u_{fb}$  prihodnja akcija povratne zanke in  $i$  predstavlja  $i$ -ti korak napovedi.  $Q$  in  $R$  sta simetrični matriki z elementi, ki predstavljajo uteži,  $e_r(k+i)$  je prihodnji referenčni sledilni pogrešek,  $e(k+i|k)$  je napoved sledilnega pogreška in  $\varepsilon(k+i) = e_r(k+i) - e(k+i|k)$ . V  $i$ -tem koraku napovedi je sledilni pogrešek določen z naslednjim modelom:

$$e(k+i|k) = A(k+i-1)e(k+(i-1)|k) + B(k+i-1)u_{fb}(k+i-1) \quad (8)$$

kjer sta  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , in  $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , pri čemer je  $n$  število spremenljivk stanja,  $m$  pa je število vhodnih spremenljivk. Učinkovita optimizacijska metoda, ki jo lahko uporabimo pri minimizaciji cenilke v MPC je optimizacija z rojem delcev. Akcije iščemo v intervalu  $[t, t+hT_s]$ . Najprej definiramo cenilko  $J$  kot:

$$J(t+hT_s) = \sum_{i=1}^h e(t+hT_s)^T Q e(t+hT_s) + u_{fb}^T R u_{fb} \quad (9)$$

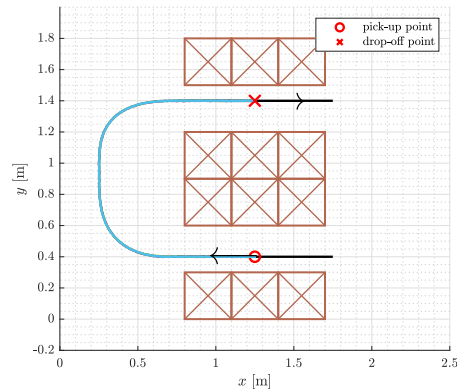
Metoda PSO uporablja populacijo kandidatov rešitev, t.i. delcev. Za vsak delec  $i$  v roju  $n$ -tih delcev obstaja vektor parametrov  $x_i = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ , ki definira njegove položaje, in vektor  $v_i = [v_1 v_2 \dots v_n]^T$ , ki definira njegove hitrosti v  $d$  dimenzionalnem prostoru parametrov. V našem primeru  $x_i$  sestavljajo akcije  $v_s$  in  $\omega_s$ ,  $v_i$  pa je sprememba regulirnih hitrosti. Najboljše vrednosti parametrov delcev so shranjene v vektorju  $\mathbf{pBest}_i = [p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{id}]^T$ , in najboljši parametri roja so spravljani v vektorju  $\mathbf{gBest} = [g_1, g_2, \dots, g_d]^T$ . Posodobitve hitrosti in položajev  $i$ -tega delca v  $r$ -ti

iteraciji so:

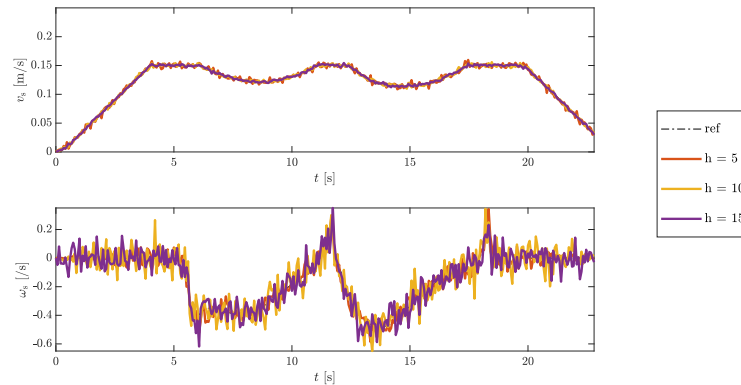
$$v_i^{(r)} \leftarrow \omega_{in} v_i^{(r-1)} + c_1 r_1 (pBest_i^{(r-1)} - x_i^{(r-1)}) + c_2 r_2 (gBest_i^{(r-1)} - x_i^{(r-1)}) \quad (10)$$

$$x_i^{(r)} \leftarrow x_i^{(r-1)} + v_i^{(r)}$$

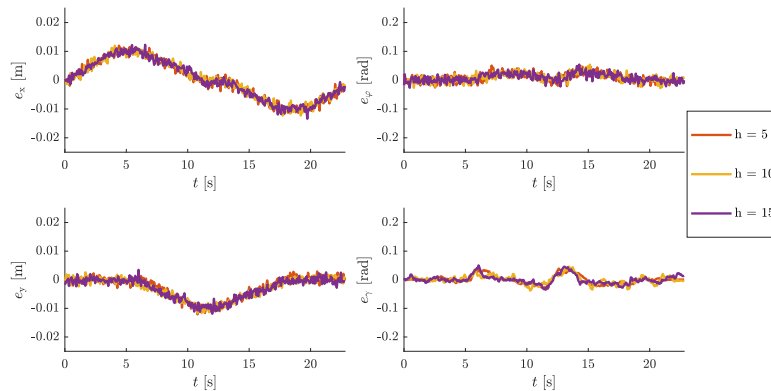
Parameter  $\omega_{in}$  je utež vztrajnosti. Kognitivna konstanta  $c_1$  in parameter  $r_1$  utežita stohastično privlačnost k najboljšemu parametru delca  $pBest_i$  (utež lokalnega iskanja).  $r_1$  ima naključno vrednost na intervalu  $[0, 1]$  in poveča verjetnost najdbe globalnega optimuma oziroma prepreči prehitro konvergenco. Konstanta socialnega obnašanja v roju  $c_2$  in parameter  $r_2$  utežita stohastično privlačnost k najboljšemu parametru roja  $gBest$  (utež globalnega iskanja).  $r_2$  ima naključno vrednost z intervala  $[0, 1]$  in ima enako vlogo kot  $r_1$ . Predpostavili smo, da so v prediktivskem horizontu akcije konstantne, med optimizacijskim procesom pa smo eksplicitno zagotovili še, da sta omejeni hitrost in kotna hitrost ter pospešek.



Slika 4: Referenčna pot (črtkano) in pot, ki jo v simulaciji opravi robot v primeru, da ni začetnega pogreška stanja



Slika 5: Rezultati simulacije: referenčna regularna signala  $v_{s,\text{ref}}(t)$  in  $\omega_{s,\text{ref}}(t)$  (črtkano) in regularna signala  $v_s(t)$  ter  $\omega_s(t)$  za različne vrednosti predikcijskega horizonta  $h$



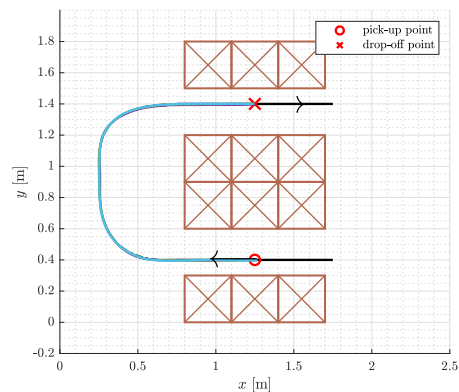
Slika 6: Vektorji pogreška lege  $e_x(t)$ ,  $e_y(t)$ ,  $e_\phi(t)$ , in  $e_\gamma(t)$  pri eksperimentu na realnem robotu za različne vrednosti predikcijskega horizonta  $h$

#### 4 Rezultati

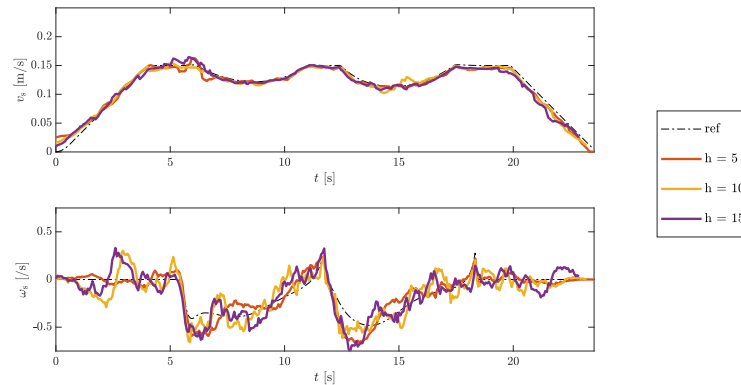
Simulacije smo izvedli v programskem okolju MATLAB z uporabo Runge-Kutta integracijske metode za simulacijo zveznega prostora stanj kinematičnega modela tricikla. Regulator smo implementirali v diskretni obliki. Predpostavili smo, da je šum normalno porazdeljen s standardnimi deviacijami 0,001 m za koordinati  $x$  in  $y$ , 0,01 rad za kot  $\phi$  in 0,001 rad za kot  $\gamma$ ; vrednosti smo ocenili na podlagi lastnosti merilnega sistema realnega kolesnega mobilnega robota. Rezultati simulacij so predstavljeni na slikah 4, 5 in 6.

Eksperimente smo izvedli tudi na realnem robotu (slika 1). S sistemom za sledenje objektom na podlagi slike smo merili lego (pozicijo in orientacijo) kolesnega mobilnega robota. Na robotu je značilka iz knjižnice [10], ki omogoča identifikacijo,

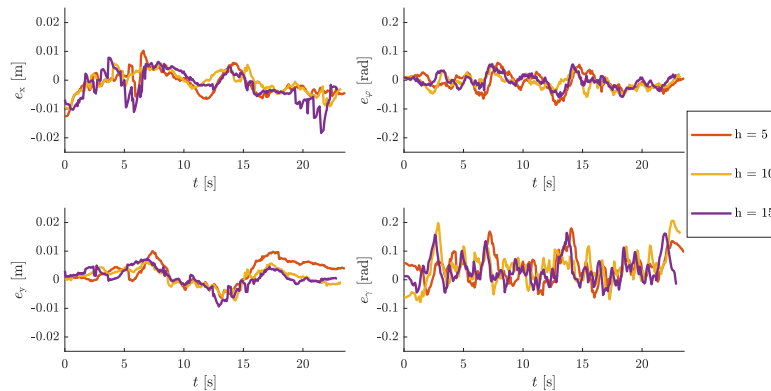
sledenje in razločevanje prek sekvence slik, ki jih pridobimo s kamero Raspberry Pi Camera Module V2. Uporabili smo tudi set programskih



Slika 7: Referenčna pot (črtkano) in pot, ki jo opravi realni robot v primeru, da ni začetnega pogreška stanj



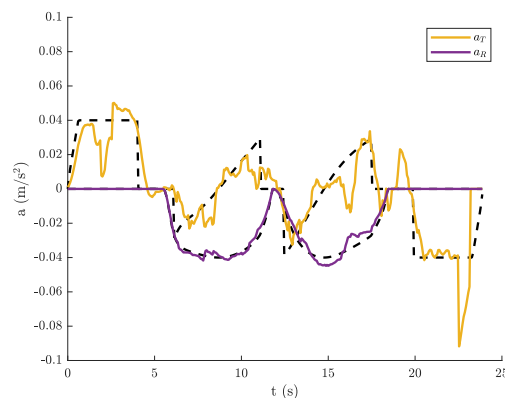
Slika 8: Rezultati eksperimenta na realnem robotu: referenčna regulirna signala  $v_{s,\text{ref}}(t)$  in  $\omega_{s,\text{ref}}(t)$  (črtkano) in regulirna signala  $v_s(t)$  ter  $\omega_s(t)$  za različne vrednosti predikcijskega horizonta  $h$



Slika 9: Vektorji pogreška lege  $e_x(t)$ ,  $e_y(t)$ ,  $e_\phi(t)$ , in  $e_\gamma(t)$  pri eksperimentu na realnem robotu za različne vrednosti predikcijskega horizonta  $h$

knjižnic in orodij za omogočanje prenosa podatkov in za vzpostavitev komunikacije med robotom, računalnikom in kamero (ROS, angl. *Robot Operating System*). Rezultati eksperimentov so predstavljeni na slikah 7, 8 in 9.

Vse eksperimente smo izvedli v primeru ničelnega začetnega pogreška stanja, saj nas je zanimalo predvsem, kako uspešno je izveden zahtevan hitrostni profil. Vsi eksperimenti potrjujejo zadovoljivo sledenje trajektoriji za vse predikcijske horizonte. Iz meritev, pridobljenih na realnem robotu, smo ocenili tudi dejanske vrednosti pospeškov (slika 10), a je šum že precej izrazit. Merjenje dejanskih vrednosti tangenta in radialnega trzaja pa je zaradi merilnega šuma zelo težavno in zahteva nadaljnjo obravnavo (uporaba dodatnih inercialnih senzorjev).



Slika 10: Referenčne (črtkano) in dejanske izmerjene vrednosti tangenta in radialnega pospeška

## 5 Zaključek

V članku smo obravnavali problem sledenja trajektoriji za kolesni mobilni sistem in ga izve-

dli z modelnim prediktivnim vodenjem z optimizacijo z rojem delcev. Simulirali smo problem vožnje avtonomnega vozila v avtomatiziranem skladišču, pri čemer smo uporabili časovno minimalno trajektorijo z omejitvami hitrosti, pospeška in trzaja. Študijo smo izvedli v simulacijskem okolju in z eksperimenti na realnem robotu.

Opisano metodo vodenja, ki je zasnovana za neholonomične mobilne sisteme, je mogoče uporabiti tudi na holonomičnih mobilnih sistemih. Njena prednost je tudi, da zaradi optimizacije z rojem delcev regulator implicitno vsebuje omejitve hitrosti, kotne hitrosti in pospeškov. Predstavljeno vodenje kolesnega mobilnega sistema po časovno minimalni trajektoriji ima mnogo načinov uporabe. Pristop je posebej koristen za avtomatsko vodena vozila, ki delujejo v industrijskih okoljih, na primer v proizvodnih halah ali avtomatiziranih skladiščih. V teh delovnih okoljih so poti znane vnaprej, pomembno pa je zagotoviti hitro, učinkovito in varno vožnjo. Z vključitvijo omejitev hitrosti, pospeška in trzaja v proces načrtovanja trajektorij lahko zadostimo rabi v primerih vodenja z različnimi zahtevami, ki jih določajo dinamične lastnosti tovora. Tako lahko na primer preprečimo zdrsovanje koles ali prevrnitev vozila v ovinkih. Pri pretvorbi dinamičnih zahtev v omejitve, ki se upoštevajo pri načrtovanju trajektorije, lahko tudi uporabimo strožje omejitve, da regulatorju omogočimo dovolj manevrskega prostora za odpravo pogreška.

V prihodnje se bomo posvetili izvedbi kompleksnejših poskusov na realnem sistemu, pri čemer bi radi analizirali učinek nastavitve različnih naborov dinamičnih omejitev. Prav tako je zelo zahtevna naloga ocena dejanskih vrednosti pospeškov in trzajev in pa mejnih vrednosti teh količin, saj so za to potrebni natančni instrumenti (senzorji pospeška in precizna kamera). To je potrebno, če želimo ovrednotiti delovanje regulatorja, ki implicitno upošteva tudi omejitve trzaja.

## Zahvala

Delo je bilo sofinancirano iz programa ARRS P2-0219.

## Literatura

- [1] G. Klančar in M. Seder. Coordinated Multi-Robotic Vehicles Navigation and Control in Shop Floor Automation. *Sensors*, zv. 22, št. 4, str. 1455, 2022.
- [2] L. Polten in S. Emde. Scheduling automated guided vehicles in very narrow aisle warehouses. *Omega*, zv. 99, str. 102204, 2021.
- [3] J. Li, M. Ran in sod. Mpc-based unified trajectory planning and tracking control approach for automated guided vehicles. V *2019 IEEE 15th International Conference on Control and Automation (ICCA)*, str. 374–380. 2019.
- [4] R. Vrabič, T. Žužek in sod. *Improving the Flow in Multi-robot Logistic Systems Through Optimization of Layout Roadmaps*, str. 923–934. 2023.
- [5] H. Xiao, Z. Li in sod. Robust Stabilization of a Wheeled Mobile Robot Using Model Predictive Control Based on Neurodynamics Optimization. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, zv. 64, št. 1, str. 505–516, 2017.
- [6] G. Klančar, A. Zdešar in sod. *Wheeled Mobile Robotics: From Fundamentals Towards Autonomous Systems*. Butterworth-Heinemann, 2017, 125–160 str.
- [7] M. Benko Loknar, S. Blažič in G. Klančar. Minimum-time velocity profile planning for planar motion considering velocity, acceleration and jerk constraints. *International Journal of Control*, zv. 96, št. 1, str. 251–265, 2023.
- [8] M. Benko Loknar, G. Klančar in S. Blažič. Minimum-time trajectory generation for wheeled mobile systems using beacute;zier curves with constraints on velocity, acceleration and jerk. *Sensors*, zv. 23, št. 4, 2023.
- [9] G. Klančar in I. Škrjanc. Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time. *Robotics and Autonomous Systems*, zv. 55, št. 6, str. 460–469, 2007.
- [10] S. Garrido-Jurado, R. Muñoz-Salinas in sod. Automatic generation and detection of highly reliable fiducial markers under occlusion. *Pattern Recognition*, zv. 47, št. 6, str. 2280–2292, 2014.