

# **Modeliranje in simulacija žerjava**

**Miha Ožbot, Nejc Presečnik, Matej Zorec**

**Mentor: doc .dr. Gorazd Karer**

**Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani**

**miha.ozbot1@gmail.com, nejc.presecnik@gmail.com, matejko.zored@gmail.com**

## *Crane modelling and simulation*

The article describes the development of a mathematical model of a crane system. Through modelling procedure, different design methods were used. The work started with the theoretical modelling, while later on it was improved by experimentations with the real system in order to optimize the structure of the model and its parameters. First, a nonlinear model was designed, which was later also simplified into a linearized description. The matching between the nonlinear model and the real system responses was not satisfactory, therefore we focused on improving the model in the second design phase so that the final result is suitable for further control-design purposes.

## *Kratek pregled prispevka*

Članek govori o izgradnji matematičnega modela žerjava, s poudarkom na opisu poteka modeliranja in uporabi različnih metod modeliranja. K modeliranju smo pristopili s pomočjo teoretičnega modeliranja, ki smo ga nadgradili s pomočjo informacij, pridobljenih z eksperimenti na realnem sistemu. Sprva smo s pomočjo teoretičnega modeliranja izpeljali nelinearni model, katerega smo kasneje linearizirali v delovni točki. Ker so bila odstopanja med odzivi realnega sistema in odzivi modela prevelika, smo se osredotočili na izboljšavo modela s pomočjo eksperimentalnega modeliranja. V drugi fazi modeliranja smo dopolnili strukturo modela in še nadalje dopolnili nekatere parametre modela, da smo dosegli primerno kvaliteto za namene nadaljnega načrtovanja vodenja obravnavanega sistema.

## 1 Uvod

Članek prikazuje postopke modeliranja in eksperimentiranja s sistemom nihala na vozičku. Predstavljen sistem je poenostavitev realne naprave gradbenega žerjava, ki omogoča preučevanje njegovega delovanja v manjšem merilu. Eksperimentiranje in modeliranje velikega žerjava je zelo težavno in časovno potratno, zato je manjša naprava, ki simulira njegovo delovanje, nujna za razumevanje takega sistema.

Namen modela je spoznavanje žerjava in njegovih lastnosti. Tako pripravljen model lahko z manjšimi popravki parametrov uporabimo za vodenje realnega sistema.

Strukturo modela smo določili teoretično s pomočjo ravnovesnih fizikalnih zakonov in z njimi povezano Lagrangeovo enačbo [1]. Tak postopek omogoča boljše razumevanje delovanja sistema in razširitev uporabe modela na realni sistem. Parametre modela smo določili s pomočjo eksperimentov in pri tem ustreznost modela ciklično preverjali.

Potek modeliranja lahko razdelimo na dva dela, kjer prvi del predstavlja razvoj osnovnih relacij in drugi njihovo nadgradnjo. V prvem delu smo razvili nelinearni model za celotno območje delovanja naprave. Po oceni ustreznosti prvega modela smo nadaljevali z uglasenjem parametrov nelinearnega modela in povečanjem njegove kompleksnosti ob uporabi izmerjenih odzivov realnega sistema. Nelinearni model smo z določenimi predpostavkami linearizirali v izbrani delovni točki.

Članek je razdeljen na poglavja v skladu s potekom modeliranja. V drugem razdelku predstavljena obravnavana naprava. V tretjem razdelku začnemo s teoretičnim modeliranjem, ki ga eksperimentalno nadgradimo v četrtem razdelku. Tu predstavimo tudi linearizirani model. V petem razdelku vrednotimo modela. Članek zaključimo s šestim razdelkom, kjer povzamemo ugotovitve in predstavimo možnosti nadaljnjih raziskav.

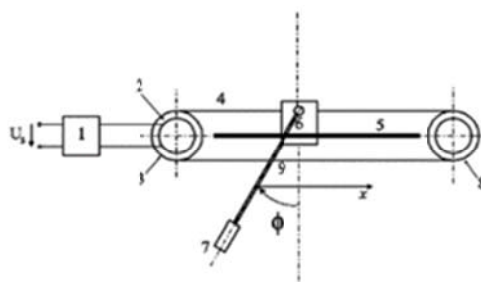
## 2 Predstavitev sistema

Jedro naprave sestavlja togo nihalo pripeto na voziček, katerega lego spreminjamo z motorjem. Položaj vozička je omejen z dolžino gredi, medtem ko se nihalo lahko vrti v območju 360 stopinj (slika 1).



Slika 1: Modelirana naprava.

Vhod v napravo je napetost na motorju, ki poganja voziček po gredi v levo ali desno. Nihanje, oz. kot nihala spreminjamo posredno preko pomika vozička. Pri tem lahko merimo relativni položaj vozička in relativni kot nihala. Podrobnejša shema je predstavljena na sliki 2.



Slika 2: Shema naprave.

Sestavni deli na shemi so po vrsti [2]: gonilnik servomotorja - 1, enosmerni servomotor - 2, pogonska jermenica - 3, jermen povezan z vozičkom - 4, vodilo vozička - 5, voziček - 6, utež na togi palici - 7,9 in pomožna jermenica - 8.

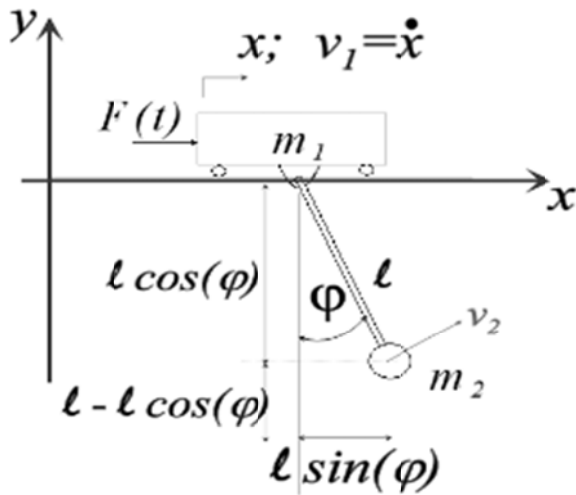
## 3 Prva faza modeliranja

V prvi fazi modeliranja smo se najprej spoznali s sistemom. S pomočjo izhodiščnih poskusov, ki smo jih izvedli z napravo, smo pridobili nekaj pomembnih informacij.

Ugotovili smo, da hitrost ne doseže stacionarnih vrednosti za vhodne napetosti višje

od 2,2 V in da je pod napetostjo 1,8 V hitrost enaka 0 m/s.

Nato smo se lotili razvoja nelinearnega modela in sicer s pomočjo Lagrangeeve enačbe, ki zahteva določitev posplošenih koordinat opisa sistema ter določitev kinetične in potencialne energije sistema. Za lažje opisovanje smo vpeljali oznake, kot so prikazane na sliki 3. V našem primeru smo kot posplošeni koordinati izbrali spremenljivki  $x$  (premik vozička po tirnici) in  $\varphi$  (kot zasuka nihala iz ravnotežnega položaja).



Slika 3: Shematski prikaz naprave z oznakami.

Ravnotežni enačbi za  $x$  in  $\varphi$  predstavimo v naslednji obliki:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) + \left( \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) = F(t) \quad (2)$$

Velja, da je Lagrangeeva funkcija  $L = T_k - V_p$ ,  $P$  je močnostna funkcija sistema,  $F(t)$  pa je vzbujanje vozička s silo motorja.

Kinetično energijo določimo na naslednji način:

$$T_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 \dot{x} l \cos(\varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2 \quad (3)$$

Potencialna energija sistema je:

$$V_p = m_2 g l (1 - \cos(\varphi)). \quad (4)$$

močnostna funkcija pa:

$$P = f_1 \dot{x}^2 + f_2 \dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

Predstavljene izraze vstavimo v ravnotežni enačbi in dobimo :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + m_2 l \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + 2f_1 \dot{x} = F(t), \quad (6)$$

$$m_2 l \cos(\varphi) \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \sin(\varphi) + 2f_2 \dot{\varphi} = 0. \quad (7)$$

Parametri modela so [2]:

$m_1$	=	4,0 kg	$m_2$	=	0,36 kg
$l$	=	0,451 m	$g$	=	9,81 m/s <sup>2</sup>
$f_1$	=	1000	$f_2$	=	0,01

Ta nelinearni sistem smo tudi linearizirali. Izbrali smo stabilno ravnotežno točko, ko je palica obrnjena navzdol ( $\varphi = 0$ ). Upoštevamo, da bo linearni model dobra aproksimacija za majhne odmike kota iz izbranega ravnotežja, ko približno veljajo naslednje enačbe:

$$\sin(\varphi) \approx \varphi$$

$$\cos(\varphi) \approx 1$$

$$\varphi^2 \approx 0$$

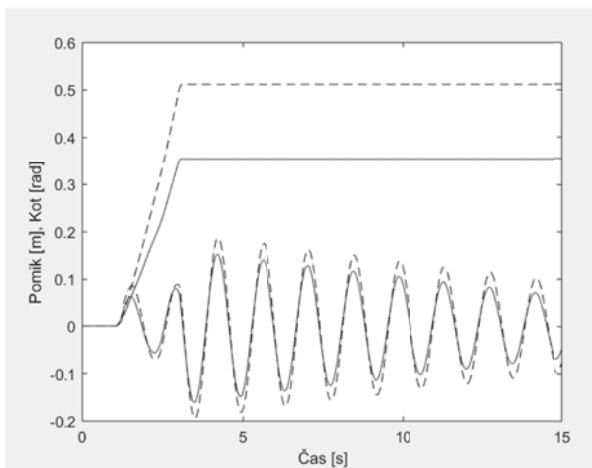
Linearizirana aproksimacija je tako določena z:

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} + 2f_1 \dot{x} = F(t) \quad (8)$$

$$m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi + 2f_2 \dot{\varphi} = 0 \quad (9)$$

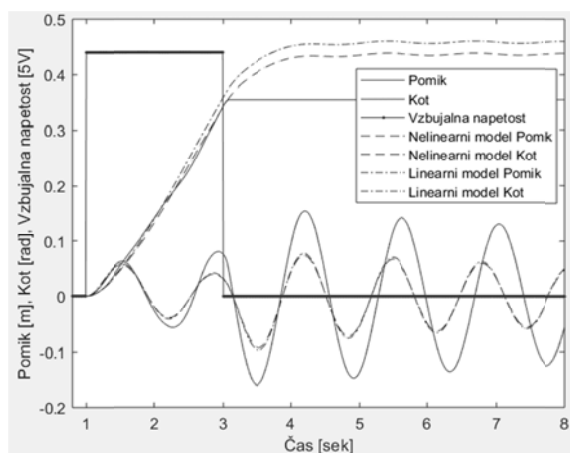
#### 4 Nadgradnja modela

Pri eksperimentalnem modeliranju in primerjavi meritev odziva realne naprave z odzivom simulacije modela je pomembno najprej preveriti ponovljivost meritev. Za namen preverjanja ponovljivosti smo pri različnih vrednostih vzbujanja za vsako izvedli več meritev pomika in kota odmika nihala. Ugotovili smo, da so izmerjeni odzivi precej ponovljivi, ne pa popolnoma (glej sliko 4). To se še posebej opazi v območju, kjer je sila motorja ravno dovolj velika, da premaga silo lepenja. Nato smo primerjali odziv simulacije modela z meritvami realnega sistema. Opazili smo precej pomanjkljivosti modela. Vrednosti parametrov [2], ki smo jih uporabili pri izgradnji matematičnega modela, se nanašajo na stanje naprave ob izdelavi.



Slika 4: Ponovljivost meritev.

Opazimo lahko, da so se zaradi staranja in rabe sistema vrednosti parametrov spremenile. Iz primerjave odzivov (glej sliko 5) smo opazili predvsem odstopanje parametra trenja vozička  $f_1$  in frekvence nihanja, ki je odvisna predvsem od dolžine palice nihala  $l$ . Po premisleku smo ugotovili, da na gibanje vozička močno vplivata tudi zaviralna sila motorja  $F_{zav}$  in sila lepenja vozička  $F_{lep}$ .



Slika 5: Odziv pri parametrih iz priročnika.

V nadaljevanju smo se osredotočili na izboljšavo parametrov dušenja vozička  $f_1$  in dušenja ležajev nihala  $f_2$ .

Za lažjo določitev parametrov smo model razdelili na dva podmodela, voziček in nihalo. Za določitev parametra dušenja vozička smo izpeljali matematični model vozička brez nihala (enačba 10) in odziv simulacije primerjali z odzivom realne naprave, ki smo ji odstranili palico z utežjo. Parameter  $f_1$  smo določili na 8 kg/s.

$$\ddot{x} = \frac{F(t) - f_1 \dot{x}}{m_1} \quad (10)$$

Parameter dušenja vozička smo določili izkustveno s primerjanjem odziva samo v času, ko je bilo vzbujanje prisotno, za tem odziva za določanje parametra dušenja vozička nista uporabna, saj nastopi vpliv zaviralne sile motorja.

Za določitev parametra dušenja smo izpeljali matematični model nihala (enačba (11)) in odziv primerjali z odzivom realne naprave.

$$\ddot{\varphi} = \frac{-m_2 l g \sin(\varphi) - f_2 \dot{\varphi}}{m_2 l^2} \quad (11)$$

Realne naprave ni bilo potrebno dodatno fiksirati, saj nihanje nihala, zaradi sile lepenja in zaviralne sile motorja vozička ni premaknilo. Parameter dušenja v ležaju smo določili s pomočjo optimizacijskega algoritma Nelder-Mead simpleks. Najprej smo izločili lokalne maksimume in minimume kota odmika, izračunali absolutno vrednost vrhov in interpolirali polinomom tretje stopnje. Enako smo storili z odzivom modela nihala. V kriterijski funkciji smo računali uteženo kvadratno napako razlike polinomov in razlike frekvenc nihanja.

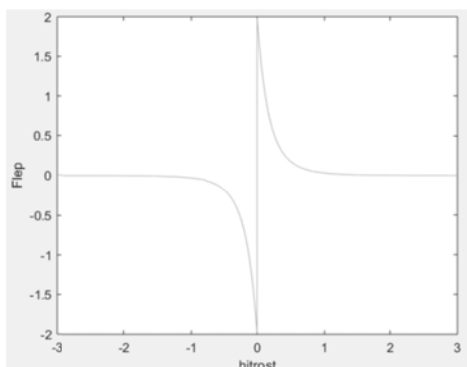
Po spremembi parametrov so se odzivi modela in naprave bolje prilegali, potrebno pa je bilo implementirati še zaviralno silo motorja in silo lepenja.

Zaviralna sila motorja se na odzivih pojavi, ko prenehamo z vzbujanjem motorja. To na odzivu realne naprave opazimo kot precej hitrejša ustavitev vozička kot na odzivu modela. Ta sila je posledica induciranih tokov v motorju in ostalih vplivov znotraj motorja. Definirali smo jo izkustveno, kot prikazuje enačba (12). Zaviralno silo motorja prištejemo sili trenja.

$$F_{zav} \begin{cases} 0; & U \neq 0 \\ K_{zav}; & U = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Že prej smo ugotovili, da ko na motorju ni vzbujanja in voziček miruje, nihalo pa odmaknemo od stabilne lege in spustimo, da prosto niha, to vozička ne premakne. To je posledica sile lepenja, ki se upira premikanju

vozička, ko je hitrost vozička enaka 0. Takoj, ko je sila lepenja premagana in se voziček premakne, sila lepenja nima več vpliva na gibanje vozičke, dokler se ta ponovno ne ustavi. Sila lepenja ima torej neko vrednost samo pri hitrosti 0 in je nezvezna. Tako silo je v simulacijskem okolju Simulink težko realizirati, zato smo silo lepenja realizirali kot funkcijo hitrosti, ki jo definira enačba (13) in prikazuje slika 6.



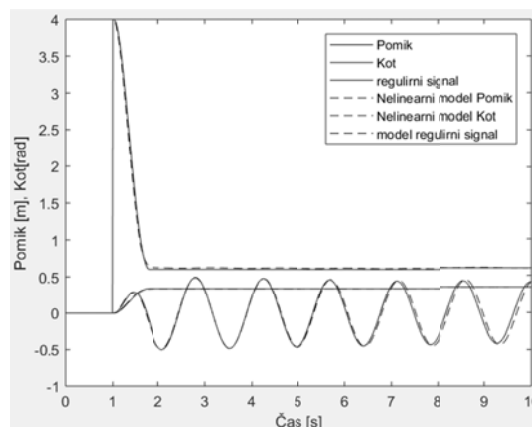
Slika 6: Funkcija sile lepenja.

## 5 Vrednotenje

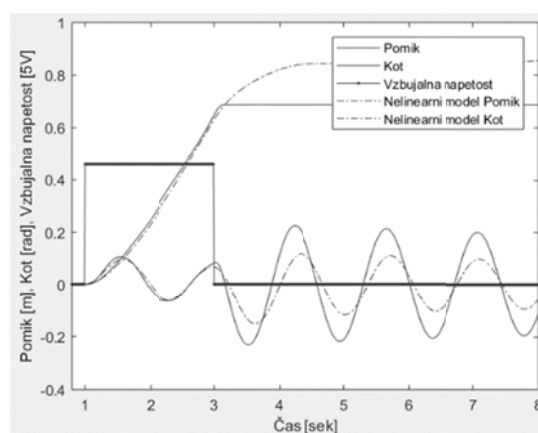
Odzivi modela na izbrane vhodne signale so zadovoljivi, če je čas simulacije primerno majhen. Težave povzročajo modeliranje nihanja, saj lahko pravi signal že ob manjših zdrsih odstopi od predvidenega odziva modela. Pri tem se napaka kota zaradi narave sistema akumulira in s tem močno pokvari fazo nihanja.

Model smo ovrednotili tudi pri uporabi proporcionalnega regulatorja. Odzive realne naprave smo primerjali z odzivi modela v povratni zanki z enakim P-regulatorjem in enakim referenčnim signalom. Za vrednotenje smo primerjali tako izhodne signale kot sta pomik in kot, ko tudi regulirne signale. Primerjavo odzivov realne naprave in modela pri vodenju z regulatorjem lahko opazujemo na sliki 7.

Linearni model dobro aproksimira delovanje sistema v delovni točki, tj. izbrani vhodni napetosti. Tak vzbujalni signal lahko ohranjamo, dokler voziček ne doseže konca gredi.



Slika 7: Odzivi pri vodenju z regulatorjem.



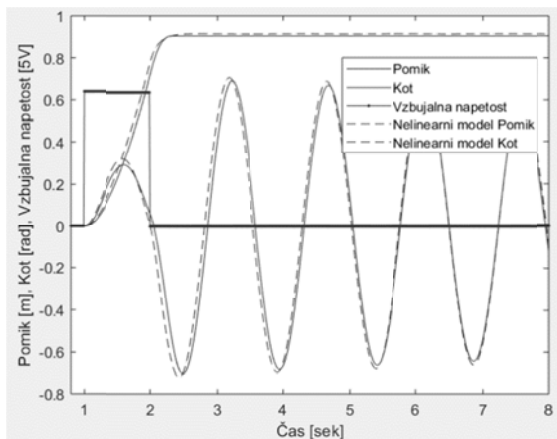
Slika 8: Analiza linearne modela.

Po padcu vhodnega signala na vrednost nič, model ni več v delovni točki in opazimo lahko odstopanje od odziva realnega sistema. Izven delovne točke je potrebno upoštevati še silo lepenja in zaviralno silo motorja, ki nista linearna.

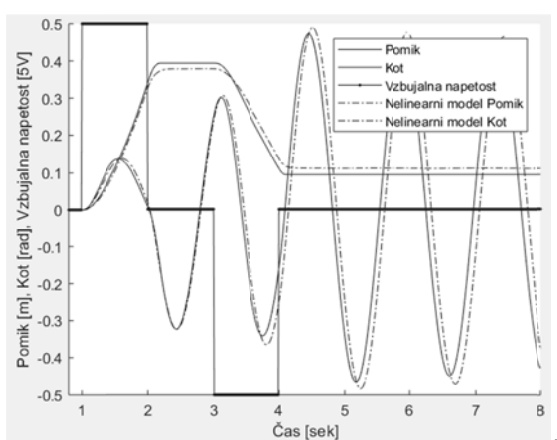
## 6 Zaključek

V prispevku smo predstavili celoten potek modeliranja pilotne naprave žerjav s kombinacijo teoretičnega in eksperimentalnega modeliranja. Opisali smo korake, ki so vodili do izdelave dveh modelov.

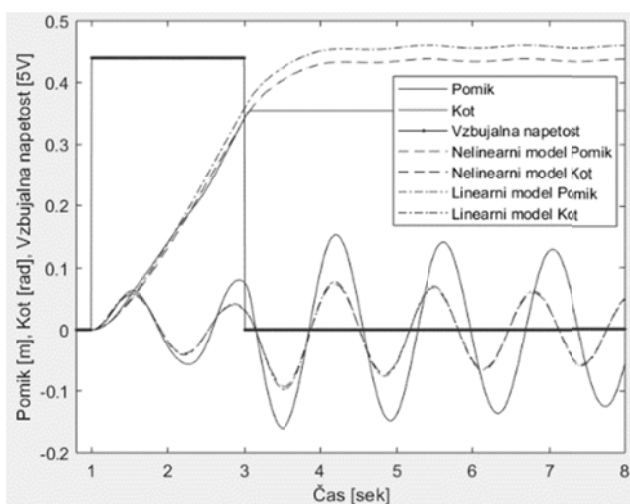
Nelinearni model je namenjen delovanju na širšem območju vhodnih signalov, medtem ko ima linearni model ustrezen odziv le v okolici izbrane delovne točke (glej slike 10, 11 in 12).



Slika 11: Odziv nelinearnega modela.



Slika 11: Odziv nelinearnega modela na poljuben vhodni signal.



Slika 12: Odziv linearnega modela izven DT.

V nadaljevanju bomo skušali nelinearni model dopolniti tako, da bo opisoval obnašanje nihala v celotnem območju delovanja, razvili bomo še en linearizirani model v nestabilni

ravnotežni točki, sledilo pa bo tudi načrtovanje vodenje obravnavanega sistema.

## 7 Literatura

- [1] M. Atanasijević-Kunc, Metode modeliranja, Študijsko gradivo, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2019.
- [2] Amira GmbH, PS600 Laboratory Experiment Inverted Pendulum, Amira GmbH, Bismarckstrasse, Duisburg, 2000.
- [3] R. Andrejc, G. Karer, Matematično modeliranje gibanja žerjava, Zbornik štiriindvajsete mednarodne Elektrotehniške in računalniške konference ERK 2015, zv. A, str. 195-198.
- [4] M. Atanasijević-Kunc, R. Karba, B. Zupančič, Modeliranje in simulacija, 1. izd. Ljubljana: Založba FE, 2016.
- [5] M. Atanasijević-Kunc, Modeliranje procesov: zbirka z ilustracijami v okolju Matlab-Simulink. 2. izd., Fakulteta za Elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2008.