

Regulacija ravnovesja valjčka na letvi

Andrej Sarjaš
Univerza v Mariboru
Smetanova 17, 2000 Maribor, Slovenija
andrej.sarjas@uni-mb.si

The balance Control Work Bench, is a set-up experiment made for educational purposes. The problem is to find an optimal strategy for a reel following a prescribed reference position along a bar mounted on a pivot. . The balance control of the reel on the bar presents state regulator and state observer, that is used for estimation non measuring states on real system. In particular the experiment demonstrates how to develop mathematical models and how to use estimators and optimal feedback control. The control strategy suggested in this prototype installation, is based on linear control theory applying feedback from the estimated states of a mathematical model describing the most important dynamics of the system.

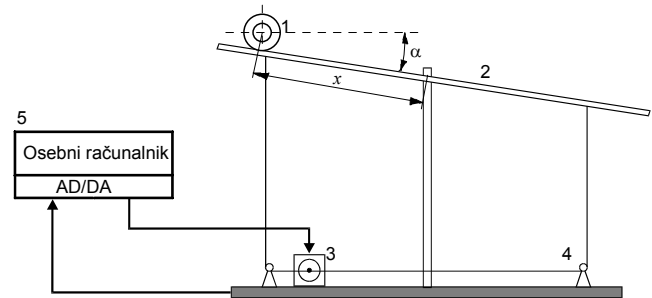
1 Uvod

Sistem za regulacijo ravnovesja je eden izmed standardnih sistemov, ki jih pogosto srečamo v regulacijskih laboratorijih. Posebnost vodenja sistema je, kako na osnovi matematičnega modela izračunati potrebne regulacijske komponente. Regulacijski sistem sestavljata regulator in opazovalnik stanj, kateri služi za ocenjevanje nemerljivih stanj na realnem objektu.

V prispevku je prikazan Lagrangeov pristop k modeliranju dinamičnih sistemov. Dobljeni matematični model smo linearizirali s postopkom tangentne aproksimacije v izbrani delovni točki. Nadalje je predstavljen izračun regulatorja in opazovalnika stanj, ki temelji na predhodnem izračunanem linearnem matematičnem modelu. V zaključku prispevka smo predstavili implementacijo regulatorja in opazovalnika stanj, kot algoritem za delovanje v realnem času.

2 Opis sistema za regulacijo ravnovesja

Sistem za regulacijo ravnovesja je zgrajen iz valja (1), ki se prosto kotali po letvi (2). Letev je preko nitke (4) povezana z enosmernim elektromotorjem (3). Motor vodimo z enosmerno napetostjo s pomočjo osebnega računalnika z vgrajeno ADDA kartico(5). Na sliki 1 je prikazan celoten sistem za regulacijo ravnovesja.



Slika 1: Sistem za regulacijo ravnovesja.

3 Modeliranje

S pomočjo LAGRANGE-ovih enačb smo posebej modelirali valjček na letvi, letev, enosmerni elektromotor, nakar smo jih povezali v celoten skupen model. Podali bomo samo končne rezultate modeliranja ter predstavili zanemarljive vplive, katere nismo upoštevali tekom postopka modeliranja in se pojavljajo na realnem objektu [2].

3.1 Matematični model valjček-letev:

Tekom matematičnega modeliranja smo zanemarili trenje valjčka zaradi kotaljenja in trenje letve na mestu vpetja.

$$F - F_r = \left(\frac{J_V}{r_V^2} + m_V \right) \ddot{x} - m_V g \sin \alpha - m_V x \dot{\alpha}^2 = 0 \quad (1)$$

$$M - M_r = J_p \ddot{\alpha} + m_V x^2 \ddot{\alpha} + 2m_V \dot{\alpha} x \dot{x} - m_V g \cos(\alpha) x \quad (2)$$

pri čemer je:

J_p, J_v, J_T - vztrajnostni momenti palice, valja in težišča valja.

m_v - masa valja

r_v - polmer valja

x - pot

\dot{x} - hitrost

α - kotni zasuk

$\dot{\alpha}$ - kotna hitrost

3.2 Skupni model:

V celotnem matematičnem modelu smo zanemarili elastičnost nitke, trenje pri prenosnih kolescih (slika 1, (4)) in drsenje nitke na osi motorja. Skupni model predstavljata dve diferencialni enačbi. Prva opisuje povezavo letve in elektromotorja (5), druga opisuje kotaljenje valjčka po klancu, oziroma letvi (6).

$$\frac{Pk_m}{R_a} \left(U - k_e P \dot{\alpha} \right) - J_m P^2 \ddot{\alpha} - B_m P^2 \dot{\alpha} = \quad (5)$$

$$J_p \ddot{\alpha} + m_v x^2 \ddot{\alpha} + 2m_v \dot{\alpha} \dot{x} - m_v g \cos(\alpha) x$$

P- prestavno razmerje kotnih hitrosti (med letvijo in elektromotorjem)

$$\left(\frac{J_v}{r_v^2} + m_v \right) \ddot{x} - m_v g \sin \alpha - m_v x \dot{\alpha}^2 = 0 \quad (6)$$

Izpeljani matematični model je četrte stopnje. V modelu se nahajajo štiri stanja pozicije valjčka x , hitrost valjčka \dot{x} , naklon letve α ter kotno hitrost letve $\dot{\alpha}$.

4 Linearizacija

Linearizacijo modela smo izvajali s postopkom tangentne aproksimacije. Metoda tangentne aproksimacije predstavlja linearizacijo v bližini delovne točke, ko nelinearno karakteristiko nadomestimo z linearno - s tangento. V matematičnem smislu je to razvoj funkcije v Taylorjevo vrsto, pri čemer zanemarimo vse odvode višjih stopenj. Postopek je uspešen čim manjša so odstopanja tangente od nelinearne karakteristike modela. Za linearizacijo modela smo uporabili enačbi (5) in (6), ki opisujeta nelinearno dinamiko realnega objekta. Linearizacijo smo izvajali v ravnovesni točki T.[1]

$$T(x, \dot{x}, \alpha, \dot{\alpha}, u) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

Po odvajanju enačbe (5), (6) po vseh spremenljivkah smo dobili linearni matematični model letev-elektromotor (7) in kotaljenje valjčka po klancu (8).

$$\ddot{\alpha} = \frac{m_v g}{(J_m P^2 + J_p)} \Delta x - \frac{P^2 k_m k_e + R_a B_m P^2}{R_a (J_m P^2 + J_p)} \Delta \dot{\alpha} + \frac{P k_m}{R_a (J_m P^2 + J_p)} \Delta U \quad (7)$$

$$\ddot{x} = \frac{r_v^2 m_v g}{J_v + r_v^2 m_v} \Delta \alpha \quad (8)$$

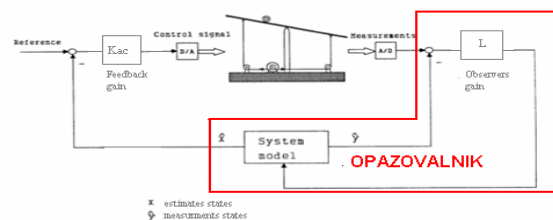
Zapis linearnega matematičnega modela v prostoru stanj.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_v^2 m_v g}{J_v + r_v^2 m_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m_v g}{(J_m P^2 + J_p)} & 0 & 0 & -\frac{P^2 k_m k_e + R_a B_m P^2}{R_a (J_m P^2 + J_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P k_m}{R_a (J_m P^2 + J_p)} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1000] \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

5 Načrtovanje regulacijskega sistema za objekt regulacije ravnovesja valjčka na letvi.

Regulacijski sistem za regulacijo ravnovesja valjčka na letvi, predstavlja regulator in opazovalnik stanj. Na objektu merimo le pot valjčka x in kotno hitrost letve $\dot{\alpha}$. Spremenljivki hitrost valjčka \dot{x} in naklon letve α , moramo oceniti s pomočjo opazovalnika stanj. Večina dela je temeljila na izračunu različnih tipov opazovalnikov stanj ter njihovi implementaciji za delovanje v realnem času.



Slika 2: Sistem z opazovalnikom in regulatorjem stanj

5.1 Regulator stanj

Regulator stanj smo izračunali s pomočjo metode tehnike pomikanja polov. Pri tehniki

pomikanja polov je potrebno izbrati takšne zaprtizančne pole, ki nam zagotavljajo stabilno delovanje ter določajo dinamiko in kvaliteto regulacijskega sistema. Za izračun regulatorja smo izbrali pole tako, da smo predpostavili dušenje sistema d in krožna frekvenca ω . Tako smo dobili konjugiran kompleksni par pola s_1 in s_2 , ostala dva pola s_3, s_4 smo izbrali poljubno.

$$s_{1,2} = -d\omega \pm \left| \omega \sqrt{1-d^2} \right| \cdot i$$

Regulator stanj smo izračunali za diskretni sistem, zato je bila potrebna diskretizacija polov s časom tipanja, katerega smo uporabili tudi na realnem sistemu.

$$z_n = e^{(s_n \cdot T_s)}$$

Z izbranimi poli tvorimo karakteristični in matrični polinom (9),(10), izračunamo vodljivostno matriko Q_v (11) ter s pomočjo Ackermannove formule (12) izračunamo ojačenja regulatorja stanj R_p . [1]

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \quad (9)$$

$$P(A) = A_d^4 + m_3 A_d^3 + m_2 A_d^2 + m_1 A_d + m_0 \quad (10)$$

$$Q_v = [B_d \dots \dots A_d^{n-1} B_d] \quad (11)$$

$$R_p = [00 \dots \dots 01] Q_v^{-1} P(A) \quad (12)$$

5.2 Opazovalnik stanj

Opazovalnik stanj služi za ocenjevanje nemerljivih stanj v sistemu. V splošnem poznamo več vrst opazovalnikov stanj. Kot vrste opazovalnikov stanj je mišljeno, koliko stanj ocenimo napram reda sistema, kateremu želimo oceniti nemerljiva stanja. Če z opazovalnikom ocenimo vsa stanja sistema (tako merjena in ne merjena), potem takšen opazovalnik imenujemo opazovalnik polnega reda (model opazovalnika je enakega reda kot matematični model sistema). Če ocenimo le del stanj, oziroma tista, ki jih ne merimo, takšen opazovalnik imenujemo opazovalnik znižanega reda (model opazovalnika je nižjega reda kot matematični model sistema).



Slika 3: Diagram prikazuje razporeditev opazovalnikov stanj

Za opazovalnike stanj poznamo različne metode in principe, kako izračunati potreben opazovalnik stanj za določen regulacijski objekt. Za ta primer smo uporabili tehniko pomikanja polov ter Kalmanov postopek izračuna na osnovi merilnega in procesnega šuma.

5.2.1 Opazovalnik polnega reda s tehniko pomikanja polov

Za izračun opazovalnika stanj s pomočjo tehnike pomikanja polov, je predhodno potrebno izračunati regulator stanj in tako poznati zaprtizančne pole sistema. Po znanih zaprtizančnih polih sistema, upoštevamo priporočilo, da morajo izbrani poli opazovalnika biti 2-5 krat hitrejši, kot zaprtizančni poli sistema z regulatorjem. Le tako lahko zagotovimo zadostno hitrost ocenjevanj stanj opazovalnika ter dobro delovanje celotnega regulacijskega sistema. Konvergenco opazovalnika stanj zagotovimo z vpeljavo pogreška med merjenim in ocenjenim stanjem (13), ki ga pomnožimo z ojačenjem opazovalnika L . (x -merjena vrednost, \hat{x} -ocenjena vrednot)

$$e(k) = y(k) - C\hat{x}(k) \quad (13)$$

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

Enačba opazovalnika:

$$\hat{x}(k+1) = A_d \hat{x}(k) + B_d u(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (14)$$

Podobno kot pri regulatorju stanj tudi tukaj tvorimo karakteristični in matrični polinom, katerega pole smo izbrali trikrat hitrejše od izbranih polov regulatorja. Določimo spoznavno matriko Q_s in izračunamo ojačenja opazovalnika stanj L po formuli (15). [1]

$$L = P(A)Q_s^{-1} [00\dots01]^T \quad (15)$$

5.2.2 Kalmanov filter

Delovanje Kalmanovega filtra je enako, kot delovanje opazovalnika stanj s tehniko pomikanja polov, enačbi (13) in (14), le da je drugačna metoda izračuna ojačenj L. Za izračun uporabimo enak linearni matematični model kot prej, enačbi (7) in (8). Izračun Kalmanovega filtra temelji na kovariančni matriki merjenega in procesnega šuma, kjer predhodnje ni potrebno poznati zaprtizančne pole regulacijskega sistema. Merilni šum lahko izmerimo na realnem objektu, procesni šum določimo eksperimentalno, glede na odziv sistema. Šuma ne smeta biti med seboj korelirana. Tvorimo kovariančni matriki merjenega in procesnega šuma R in Q ter kovariacijsko matriko pogreška P(e(k)) (16).[4]

$$P^-(k) = AP(k-1)A^T + Q \quad (16)$$

Kalmanovo ojačanje izračunamo po formuli. (17)

$$L_k(k) = P^-(k)C^T [CP^-(k)C^T + R(k)]^{-1} \quad (17)$$

Ojačenja opazovalnika smo izračunali za dve merjeni stanji L_{k2} in eno merjeno stanje L_{k1} na podlagi predhodnih meritev šuma realnega objekta.

5.2.3 Opazovalnik znižanega reda

Pomembna lastnost opazovalnika znižanega reda, da ocenimo le stanja, katerih ne merimo. Torej merjena stanja vodimo na regulator stanj in posredno iz meritev ocenimo ostale ne merjene spremenljivke. Opazovalnik stanj ne bo istega reda, kot ga določa matematični model, kateri opisuje realni proces, ampak bo za število meritev nižjega reda. V našem primeru tretjega reda.

Izračun opazovalnika stanj temelji na tehniki pomikanja polov. Pred izračunom je potrebno izvesti preureditev matrik stanj. Stanja sistema preoblikujemo v dve skupini, na merljiva x_m in nemerljiva x_n (18), (19). Nato z analogijo na enačbo prostora stanj izpeljemo enačbo opazovalnika stanj znižanega reda (20).[3]

$$\begin{bmatrix} x_m[(k+1)T] \\ x_n[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mm} & A_{mn} \\ A_{nm} & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(kT) \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_n \end{bmatrix} v(kT) \quad (18)$$

$$y(kT) = [I \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_m(kT) \\ x_n(kT) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Enačba opazovalnika stanj znižanega reda.

$$q_n[(k+1)T] = (A_{nn} - GA_{nn})q_n(kT) + Gy[(k+1)T] + (A_{nm} - GA_{nm})y(kT) + (B_n - GB_n)v(kT) \quad (20)$$

Dinamiko opazovalnika določimo z izbranimi poli iz katerih tvorimo karakterističnim polinomom P(Z) (22) in ga enačimo z karakteristično enačbo opazovalnika (21).

$$|zI - (A_{nn} - GA_{nn})| = 0 \quad (21)$$

Pole opazovalnika smo izbrali po enakem priporočilu, kot prej za opazovalnik polnega reda. Po enačenju karakterističnega polinoma P(z) (22) s karakteristično enačbo opazovalnika (21) in preureditvijo le te, dobimo sistem za izračun ojačenj opazovalnika znižanega reda G (23).[3]

$$\left| zI - \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j2} & \dots & a_{jj} \end{bmatrix}_{n \times n} + \begin{bmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} & \dots & a_{1j} \end{bmatrix}_{1 \times n} \right| =$$

$$P(z) = z^n + p_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + p_1 \cdot z + p_0 = 0 \quad (22)$$

$$U = \begin{bmatrix} a_{n-1} - w_{11} \\ \vdots \\ a_0 - w_{n1} \end{bmatrix} \Rightarrow G = D^{-1} \cdot U \quad (23)$$

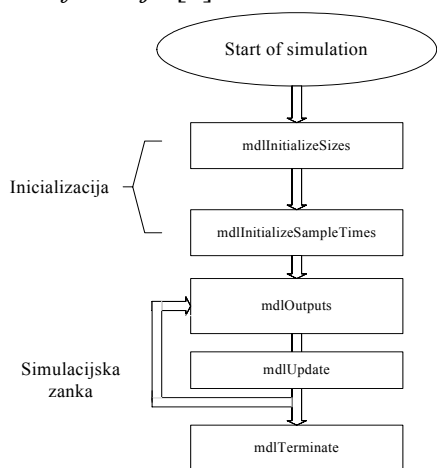
6 Preizkus algoritmov vodenja v realnem času

Za preizkus regulacijskega sistema na realnem objektu, smo uporabili programski paket Matlab 6.5, z opcijo *xPC-target*, katera nam omogoča izvajanje poizkusov na oddaljenem (target) računalniku. Struktura zahteva dva računalnika, ki sta preko serijske povezave RS232 ali TCP/IP protokola povezana med seboj in si izmenjujeta podatke. Ciljni (target) računalnik ima vgrajeno vhodno-izhodne komponente (AD/DA karto), ki omogočajo zbiranje informacij iz objekta in izvajanje prejetega algoritma od gostujočega (host) računalnika.



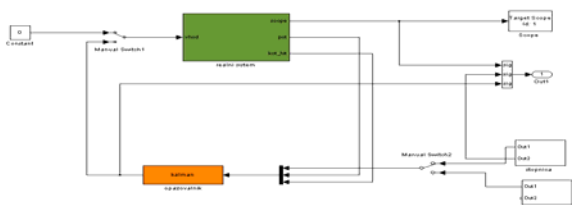
Slika 6: Struktura xPC-target načina

Algotem smo napisali v obliki *C mex S-funkcije*, ki je posebna struktura programa, katero nudi Matlab za izvajanje aplikacij v realnem času. Funkcija je sintaktično precej podobna C programskemu jeziku in zahteva enaka pravila in strukturo programiranja, kot vsak osnovni programski jezik. Dodatno ima vgrajene mikro rutine in funkcije, ki poenostavijo snovanje algoritmov za delovanje v realnem času. Slika 7 predstavlja, delovanje *C mex S-funkcije*. [5]



Slika 7: Diagram *C mex S-funkcije*

Algotem smo zagnali s pomočjo Matlab-simulinka, kjer smo *C mex S-funkcijo* v shemo vnesli v obliki bloka in nato celotno shemo prevedli s prevajalnikom za programski jezik Tako smo omogočili prenos in delovanje algoritma na ciljnim računalniku. V obliki *C mex S-funkcije* smo napisali tudi gonilnik za I/O karto, ker programski paket Matlab ni vseboval podpornega gonilnika za naš tip I/O karte.



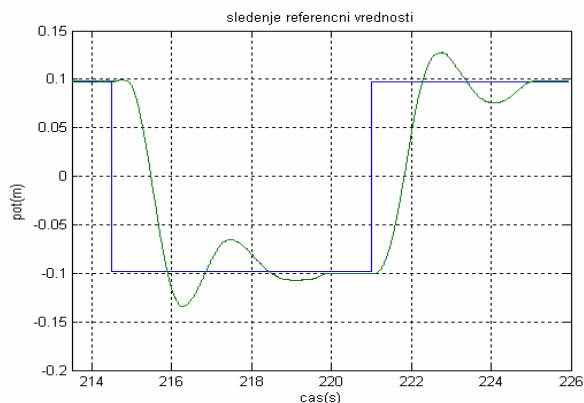
Slika 8: Blokovna shema regulacijskega sistema z vključeno *C mex S-funkcijo*

6.1 Rezultati preizkusa

Predem predstavimo rezultate preizkusa na realnem objektu, moramo poudariti, da smo optimalno delovanje regulacijskega sistema zagotovili šele ob dodatni optimizaciji regulatorjev in opazovalnikov stanj. To pomeni, da smo morali še dodatno nastaviti ojačenja regulatorja in opazovalnika stanj, glede na odziv regulirane veličine. Izvedli smo štiri opazovalnike stanj in jih med seboj primerjali. Regulacijski sistem smo preizkusili z vodenjem iz skrajnih leg, ki sta za 0.1m oddaljeni od ravnovesne točke.

6.1.1 Opazovalnik stanj polnega reda, izračunanega s tehniko pomikanja polov

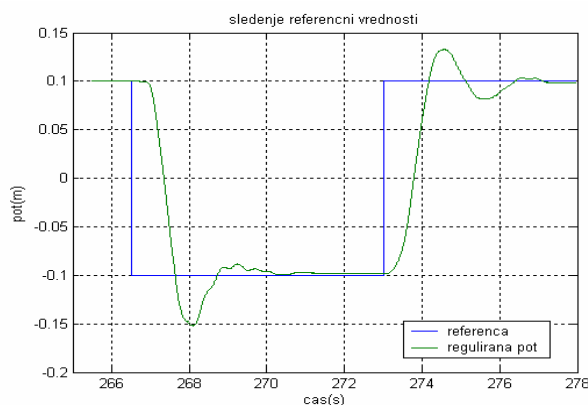
Vodenje iz lege $-0.1\text{m} - 0.1\text{m}$.



Slika 9: Vodenje iz skrajnih leg

6.1.2 Kalmanov filter in enim merljivim stanjem - pot

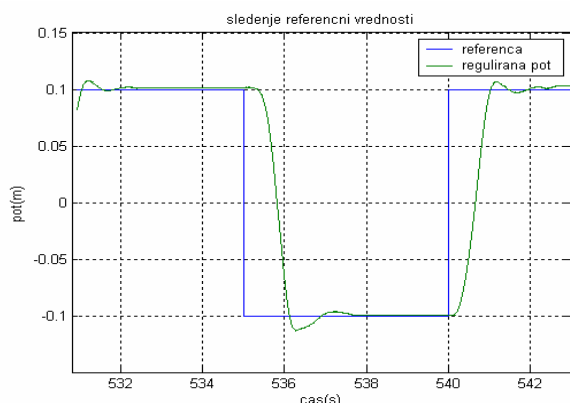
Vodenje iz lege $-0.1\text{m} - 0.1\text{m}$.



Slika 10: Vodenje iz skrajnih leg

6.1.3 Kalmanov filter z dvema merljivima stanjema pot in kotna hitrost

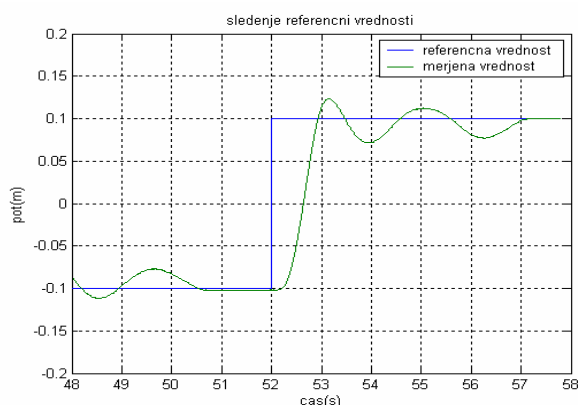
Vodenje iz lege $-0.1\text{m} - 0.1\text{m}$.



Slika 11: Vodenje iz skrajnih leg

6.1.4 Znižani opazovalnik stanj

Vodenje iz lege $-0.1\text{m} - 0.1\text{m}$.



Slika 12: Vodenje iz skrajnih leg

7 Zaključek

Iz rezultatov lahko povemo, da najbolje deluje tisti regulacijski sistem, pri katerem zajamemo največ informacij iz realnega objekta. Torej Kalmanov filter z dvema merjenima stanjema je dajal najboljše rezultate, glede odzivov na vhodno referenco. Ostali regulacijski sistemi so se obnašali zadovoljivo in dokaj robustno, glede na vhodno referenco ter izhodne motnje. Preden smo regulacijo zagnali v realnem času, smo omenili, da je bilo potrebno še dodatno optimirati regulator in opazovalnik stanj. Vzrok temu bi lahko pripisali, da smo za regulator in opazovalnik stanj uporabili lineariziran matematični model, ki je zgolj okrnjena slika realnega objekta,

kateri je po naravi nelinearen. Čim boljši približek linearnega modela k realnemu objektu imamo, tem boljša bo estimacija stanj in s tem posledično tudi regulacija objekta. Toda natančen približek modela k objektu je zelo težko zagotoviti, ker na realni sistem vplivajo zunanje veličine (šumi, motnje), ki posredno spreminjajo dinamiko objekta. Takšne naključne veličine je zelo težko definirati in predvideti, tako da jih praktično ni mogoče zajeti in upoštevati na modelu.

Na sistemu se kaže druga pot, ki bi lahko prinesla ugoden rezultat, glede zanesljivejšega vodenja objekta. S pomočjo točke linearizacije, ki bi jo spreminjali, glede na izbrano referenčno vrednost, bi sproti izračunavali ojačenja regulatorja in opazovalnika stanj. To smo preizkusili, pri vodenju iz skrajne lege $0.1\text{m} - (-0.1\text{m})$, kjer smo linearizacijo izvedli v delovni točki $T(0.1, 0, 0, 0, 0)$. Iz tako lineariziranega modela, smo na novo izračunali regulator ter opazovalnik stanj in dobili bistveno boljše odzive, kot če smo linearizacijo izvajali v ravnovesni delovni točki. $T(0, 0, 0, 0, 0)$.

8 Literatura

- [1] Rajko Svečko 2003 - *Diskretni regulacijski sistemi*
- [2] Rihard Karba 1999- *Modeliranje Procesov*
- [3] Amor Chowdhury 1994 - *Načrtovanje diskretnih regulacijskih sistemov- diplomsko delo*
- [4] Greg Welch, Gary Bishop 2004 - *An Introduction to the Kalman Filter*
- [5] Mathworks - *Matlab 6.5-Help*

Delo je bilo izdelano v okviru Seminarjev 1 in 2 ter v diplomskem delu pod strokovnim vodstvom dr. Rajka Svečka, dr. Borisa Tovornika, dr. Amor Chowdhuryja in dr. Nenada Muškinje.