

Modeliranje pilotne naprave za analizo vodenja tekočih trakov

Aleš Šink

Mentor: prof. dr. Aleš Belič
Fakulteta za elektrotehniko, UL
Tržaška 25, 1000 Ljubljana
ales.sink@siol.net

Mathematical modeling of pilot plant for analysis of controlling the conveyor belt

Article describes the procedure of mathematical modeling of a pilot plant for analysis and control of the conveyor belt ie. coupled drive system. The resulting model can be used for optimizing the controlling algorithms, which are used to control the material speed and tension across the workstation. Examples of such processes can be found in paper, textiles and steel industry.

The dynamic equations of the system were derived using the method of Lagrange. The system of equation resulting from the Langrangians has been further simplified and adapted to describe the system dynamics more realistically. Finally, the equations were linearized and represented in the state space. The non-linear and linear models were validated with data obtained from the pilot plant at several operating points. All simulations and comparisons between pilot plant and mathematical model responses were performed in Matlab / Simulink.

V članku je opisan postopek matematičnega modeliranja pilotne naprave za analizo vodenja tekočih trakov, tj. sklopljenega sistema pogonov. Dobljeni model lahko uporabimo v namene optimiranja vodenja sistemov, kjer reguliramo hitrost in napetost materiala čez delovno postajo, na primer v papirni, tekstilni, jeklarski industriji, itd.

Opisan je postopek modeliranja po Lagrange-ovi metodi, kjer najprej določimo enačbe za kinetično in potencialno energijo ter izgube v sistemu. Dinamične enačbe sistema dobimo z uporabo Lagrange-ovih enačb. Opisana je tudi poenostavitev enačb v določenih situacijah in njihov zapis v prostoru stanj ter simulacija in primerjava modela z realno pilotno napravo. Simulacije in primerjave smo izvajali v okolju Matlab/Simulink.

1. Uvod

V sklopu laboratorijskih vaj pri predmetu Metode modeliranja smo dobili nalogo teoretično modelirati sistem sklopljenih pogonov. Primeri takih sistemov so sistemi, kjer reguliramo hitrost in napetost tekočega traku oziroma obdelovanca z več motorji. V takih primerih moramo zagotoviti pravilno vodenje motorjev, v nasprotnem primeru pa lahko pride do poškodb obdelovanega materiala.

2. Opis naprave

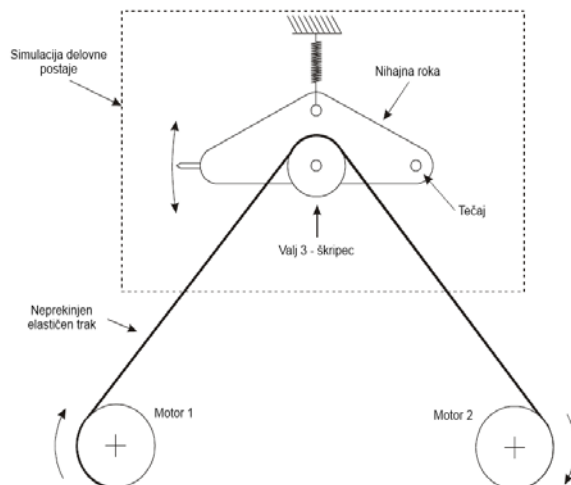
Za prikaz in analizo algoritmov za nadzor hitrosti in napetosti tekočega traku oziroma materiala lahko uporabljamo napravo s sklopljenimi pogoni CE-108 proizvajalca TQ [1].

Naprava je sestavljena iz treh valjev, dva od njih sta gnana s pomočjo električnih motorjev, tretji, prosto vrteči, pa je vpet na nihajno roko. Valji so med seboj povezani z neprekinjenim elastičnim trakom. Na voljo so meritve kotnih hitrosti posameznih valjev ter kota odmika nihajne roke.

Sistem shematsko prikazuje slika 1. Motorja 1 in 2 sodelujeta pri nadziranju hitrosti neprekinjenega elastičnega traku, ki se vrti na treh valjih. Tretji valj, imenovan tudi škripec je pritrjen na nihajno roko, ki jo podpira ročno nastavljiva vzmet. Odmik roke v pozitivno ali negativno smer nakazuje napetost traku.

Škripec in nihajna roka predstavljata delovno postajo, kjer se material, ki ga trak predstavlja, obdeluje. Trak povezuje vpliv motorja 1 in motorja 2. Na primer, če priključimo pogonsko napetost na motor 1, se spremenita tako hitrost in napetost traku, poleg tega pa se zaradi vleka zavrti tudi motor 2. Enako se zgodi tudi, če vklopimo motor 2. V tem se kaže sklopljenost sistema – oba motorja namreč vplivata na izhode sistema. To pomeni, da je sistem multi variabilen. Vhoda v sistem sta napetosti na motorjih oziroma navor motorjev 1 in 2. Izhodi iz sistema so koti zasuka valjev (φ_1 , φ_2 in φ_3), kotne hitrosti valjev (ω_1 , ω_2 in ω_3) ter odmik nihajne roke iz ravnovesne lege (x). Pri razvoju

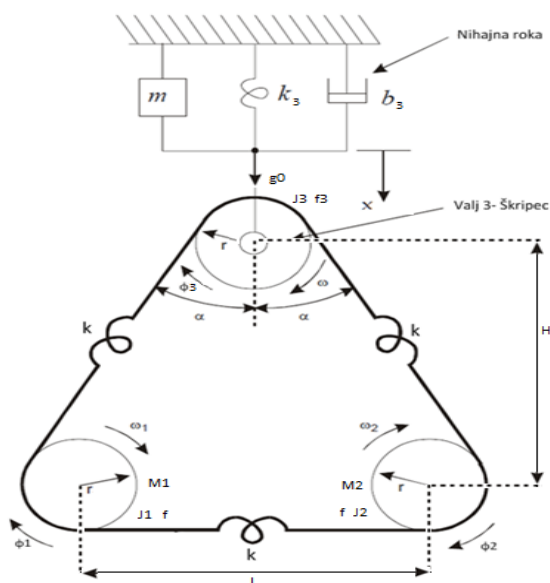
modela smo se omejili na opazovanje izhodov ω_3 in x , vhoda pa smo povezali skupaj. Za zajem podatkov iz naprave v okolje Matlab / Simulink smo uporabili vmesnik NI PCI 6221.



Slika 1: Shema naprave s sklopljenima pogonoma

3. Teoretično – matematično modeliranje sistema

Če želimo izdelati model sistema CE-108, moramo najprej ugotoviti dinamične komponente sistema. Na sliki 2 je prikazan model, pri katerem je elastični trak predstavljen z vzmetmi (k), motorja (M_1 in M_2) z valjema s pripadajočima vztrajnostnima momentoma (J_1 , J_2) in faktorjem dušenja (f), nihajna ročica pa je predstavljena z vzmetjo (k_3), maso (m) in z viskoznim dušilnikom (b_3), pripadajoči valj pa z vztrajnostnim momentom J_3 in viskoznim dušilnikom (f_3). Vsi valji imajo enak polmer (r) Pripadajoče kotne hitrosti in zasuki valjev so označeni z ω_1 , ω_2 , ω_3 , φ_1 , φ_2 in φ_3 . Hitrost in pozicija nihajne ročice pa z v in x . Razdalja med osjo pogonskih valjev in valjem škripca v mirovanju je označena z H , razdalja med spodnjima valjema pa z L . Kot α označuje kot med navpičnico in lego tekočega traku na gornjem valju.



Slika 2: Fizikalna shema naprave z oznakami veličin.

Za izračun modela po Lagrange-ovi metodi moramo najprej določiti kinetično in potencialno energijo ter izgube v sistemu.

Kinetična energija sistema:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{J_3\omega_3^2}{2} \quad (1)$$

Potencialna energija sistema:

$$S = \frac{1}{2}k[r(\varphi_1 - \varphi_2)]^2 + \frac{1}{2}k[r(\varphi_1 - \varphi_3) - x \cos \alpha]^2 + \frac{1}{2}k[r(\varphi_3 - \varphi_2) - x \cos \alpha]^2 + \frac{1}{2}k_3x^2 + mg_0(H + x) \quad (2)$$

kjer je:

$$\cos \alpha = \frac{H + x}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H + x)^2}} \quad (3)$$

Kadar sistem vzbujamo s pozitivno napetostjo, se motorja zavrtita v smeri urinega kazalca. V takem primeru iz sheme na sliki 2 vidimo, da na odmik nihajne ročice vpliva samo člen $\frac{1}{2}k[r(\varphi_3 - \varphi_2) - x \cos \alpha]^2$. Člen v tem primeru opisuje raztezek traka med valjem škripec in valjem 2. Napetost traka škripec potegne navzdol.

Člen $\frac{1}{2}k[r(\varphi_1 - \varphi_3) - x \cos \alpha]^2$ opisuje skrčitev traka med valjem 1 in valjem škripec. Ker v realnosti ni mogoče, da bi skrčitev traka potiskal škripec navzgor lahko ta člen za pozitivno napetost vzbujanja izločimo iz enačbe. Pri tem pa seveda zanemarimo, da ta člen še vedno vpliva na gibanje škripec, dokler je izraz v oklepaju pozitiven. Enačba za potencialno energijo sistema se tako poenostavi na:

$$S = \frac{1}{2}k[r(\varphi_1 - \varphi_2)]^2 + \frac{1}{2}k[r(\varphi_3 - \varphi_2) - x \cos \alpha]^2 + \frac{1}{2}k_3x^2 + mg_0(H + x) \quad (4)$$

V primeru upoštevanja enačbe 2, smo odmik iz začetne lege dobili le z upoštevanjem različnih vztrajnostnih momentov motorjev, ali v primeru, da smo motorja vzbujali zakasnjeno, kar pa seveda ni pravilno.

Zapišemo še zgube v sistemu, ki so:

$$R = \frac{f_3v^2}{2} + \frac{f\omega_1^2}{2} + \frac{f\omega_2^2}{2} + \frac{b\omega_3^2}{2} \quad (5)$$

Nadalje lahko izračunamo Lagrange-ovo funkcijo kot:

$$L = T - S \quad (6)$$

Nato z uporabo Lagrangeovih enačb (enačbe (7)) izračunamo dinamične enačbe sistema (enačbe (8)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= M_1 - \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= M_2 - \frac{\partial R}{\partial \omega_2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_3} &= -\frac{\partial R}{\partial \omega_3} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial R}{\partial v} \end{aligned} \quad (7)$$

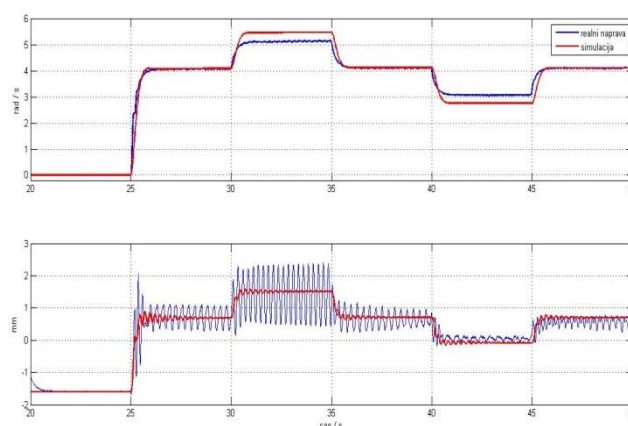
$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{J_1} [M_1 - f\omega_1 - kr^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{J_2} \left[M_2 - f\omega_2 + kr^2(\varphi_1 - \varphi_2) - \right. \\ &\quad \left. kr \left(r(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{x(H+x)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H+x)^2}} \right) \right] \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{J_3} \left[-b\omega_3 + kr \left(r(\varphi_2 - \varphi_3) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{x(H+x)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H+x)^2}} \right) \right] \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} [-f_3v - g_0m - k_3x - \\ &\quad k \left(r(\varphi_2 - \varphi_3) - \right. \\ &\quad \left. \frac{x(H+x)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H+x)^2}} \right) \left(\frac{(H+x)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H+x)^2}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H+x)^2}} - \frac{2x(H+x)^2}{2 \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H+x)^2 \right]^3} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Iz dobljenih enačb lahko v okolju Simulink zgradimo nelinearen zvezni simulacijski model. Simulacijsko shemo smo sestavili z bloki FCN, MUX, INTEGRATOR, TO WORKSPACE in STEP. Enačbe sistema smo preprosto prepisali v bloke FCN. Uporabili smo naslednje vrednosti parametrov:

- $J_1 = 8e-4 \text{ kg m}^2$,
- $J_2 = 8e-4 \text{ kg m}^2$,
- $J_3 = 4e-4 \text{ kg m}^2$,
- $r = 0,03 \text{ m}$,
- $k = 18 \text{ N/m}$,
- $k_3 = 200 \text{ N/m}$,
- $f = 25e-2 \text{ Nm/s}$,
- $f_3 = 4e-3 \text{ Nm/s}$,

- $b = 0,75 \text{ N/s}$,
- $L = 0,32 \text{ m}$,
- $H = 0,25 \text{ m}$,
- $U2M$ – koeficient pretvorbe napetosti v navor: -2,3,
- $U2X$ – koeficient pretvorba napetosti v odklik 0.02,
- $U2om$ – koeficient pretvorbe napetosti v kotno hitrost: -0.1.

4. Primerjava odzivov modela in realne naprave



Slika 3: Primerjava odziva realne naprave in modela – $U_{dt} = 5V$, zgoraj ω_3 , spodaj x : modra – naprava, rdeča – model.

Na sliki 3 je prikazana primerjava odziva realne naprave (modra) in matematičnega modela (rdeča). Zgoraj je prikazana kotna hitrost ω_3 , spodaj pa odklik nihajne roke x .

Oscilacije odklika nihajne roke realne naprave so posledica sešitega oziroma zlepljenega traku. Kadar sešitek pride na škripec, nihajna roka zaniha.

Odstopanje odzivov kotne hitrosti ω_3 modela in naprave nastane zaradi poenostavitve enačbe za potencialno energijo sistema in ne dovolj natančno ocenjenih vrednosti parametrov modela.

Prikazano je samo delovanje v eni delovni točki, v ostalih delovnih točkah je ujemanje podobno.

5. Linearizacija modela

Po določitvi statičnih karakteristik sistema smo se odločili, da nelinearni model lineariziramo v delovni točki $U_{dt} = 5V$. Linearizacijo smo izvedli z uporabo metode malih signalov. Odmik nihajne roke iz ravnovesnega položaja (x) je v primerjavi z oddaljenostjo nihajne roke od spodnjih valjev (H) veliko manjši (enačba 9).

$$\cos \alpha \doteq \frac{H}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H^2}} = \text{konstanta} = 0.875 \quad (9)$$

Dobili smo naslednje poenostavljene enačbe:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{J_1} [M_1 - f\omega_1 - kr^2(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{J_2} [M_2 - f\omega_2 + kr^2(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ &kr(r(\varphi_2 - \varphi_3) + x \cos \alpha)] \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{J_3} [kr(r(\varphi_2 - \varphi_3) + x \cos \alpha) - b\omega_3] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m} [-f_3 v - g_0 m - k_3 x - k \cos \alpha (r(\varphi_2 - \varphi_3) + \cos \alpha)]$$

Dobljene enačbe smo predstavili tudi v vektorsko matrični obliki v prostoru stanj.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \\ y &= \underline{C} \underline{x} + \underline{D} \underline{u} \end{aligned} \quad (11)$$

kjer so:

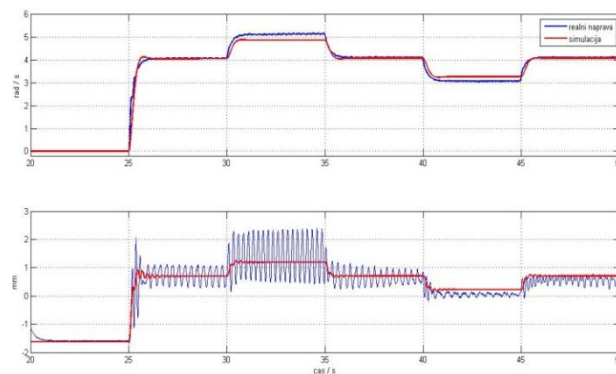
$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ g_0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -kr^2 & -f & kr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1 & J_1 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ kr^2 & 0 & -2kr^2 & -f & kr^2 & 0 & -kr \cos \alpha & 0 \\ J_2 & 0 & J_2 & J_2 & J_2 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kr^2 & 0 & -kr^2 & -b & -kr \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & J_3 & J_3 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -kr \cos \alpha & 0 & kr \cos \alpha & 0 & -kr(\cos \alpha)^2 - k_3 & -f_3 \\ 0 & 0 & m & 0 & m & 0 & m & m \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Slika 4: Primerjava odzivov linearnega modela in naprave v delovni točki $U_{dt} = 5V$, zgoraj ω_3 , spodaj x : modra – naprava, rdeča – model.

Slika 4 prikazuje odziv linearnega modela in odziv naprave. Rezultat je zelo podoben odzivu nelinearnega modela, saj je $H \gg x$.

6. Sklep

V članku je opisan postopek matematičnega modeliranja pilotne naprave za analizo vodenja tekočih trakov, ki se uporabljajo v papirni, tekstilni, jeklarski industriji, itd. Opisan je postopek modeliranja po Lagrange-ovi metodi. Rezultat modeliranja je matematični model sistema sklopljenih valjev, ki so povezani s trakom.

V enačbah nastopajo dejanske vrednosti kota zasuka valjev (φ_1 , φ_2 in φ_3). Primernejša bi bila uporaba razlike med φ_1 , φ_2 in φ_3 . Vendar je za uporabo Lagrange-ove metode ugodneje, če imamo sistem izražen s spremenljivkami, katerih medsebojna relacija je odvod ali integral. Tako smo v našem primeru uporabili kotne hitrosti in zasuke valjev sistema. S tem pa pridemo do numeričnih problemov pri daljšem času simulacije sistema. Koti zasuka se namreč med simulacijo povečujejo sorazmerno s hitrostjo vrtenja valjev in s časom pride do zelo velikih vrednosti kotov, če se trak ves čas vrti v isto smer. To pomeni, da tak model ni primeren za izvajanje ob realnem procesu dlje časa; na primer obratovanje ob realnem procesu.

Med izgradnjo modela smo naleteli tudi na mnogo problemov, najbolj zanimiv pa je bil ta, da ob stopničastem vzburjanju prve verzije modela nismo dobili nobenega odmika nihajne roke iz začetne lege, čeprav so se valji ustrezno zavrteli. S premislekom smo prišli do ugotovitve, da skrček traka ne more vplivati na odmik nihajne roke. Zato smo predpostavili, da sistem vzburjamo samo s pozitivno napetostjo na motorjih. To nam je omogočilo, da smo izvedli poenostavitev modela, in sicer tako, da smo iz enačbe za potencialno energijo sistema izločili

člene, ki opisujejo skrček traka med valjem 1 in škripcem, saj v realnosti ni mogoče, da raztezek traka potiska škripec navzgor. Pravilnost poenostavitve smo dokazali tudi s simulacijo, kjer smo omejili vrednost signala $\varphi_1 - \varphi_3$ samo na negativne vrednosti in dobili rezultat, ki se ujema z meritvami na realni napravi. Bolj splošna rešitev bi zahtevala vpeljavo omejitve na izrazu za silo, ki nastane zaradi napetosti traka samo za raztegovanje traka, ne pa tudi za krčenje. S tem pa bi model postal bolj zapleten, zaradi nezveznosti pa bi lahko prišlo tudi do numeričnih problemov.

7. Literatura

- [1] H. Hagadoorn, M. Readman, *Coupled drives 1: Basics*, control-systems-principles.co.uk,
- [2] M. Readman, H. Hagadoorn, *Coupled drives 2: Control and analysis*, control-systems-principles.co.uk,
- [3] R. Karba, *Modeliranje procesov*, Založba FE in FRI, 1999.